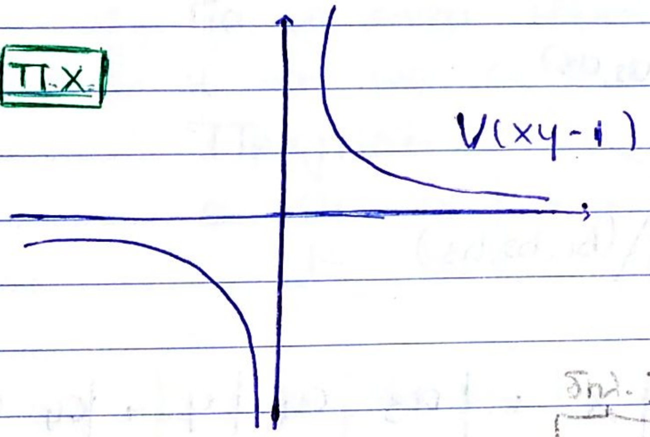
$\boxed{\text{ΔΙΑΦΟΡΕΣ}}$

27/4/20

Επίπεδο	Προβολικό επίπεδο
• Σημείο με 2 συντ/νες (x,y)	• Συντ/νες με 3 συντ/νες (x,y,z)
	$(2,1,3)=(4,2,6)=(2\sqrt{7},\sqrt{7},3\sqrt{7})$
	$(0,0,0)$ δεν είναι σημείο του προβολικού επιπέδου
• Με ενδιαφέρουν οι ευθείες που είναι της μορφής: $ax+by+\gamma=0$	• Η ευθεία εδώ είναι: $aX+bY+\gamma Z=0$ (ομογενείς)
• Καμπύλες: $V(f)$, $f(x,y)=x^3-3xy+y^2+7$	• Καμπύλες: $V(F)$, $F=X^3-3XYZ+Y^2Z+7Z^3$ (απομογενοπ. με $Z=1$)

ομογεν.

$\boxed{\text{Π.χ.}}$



Πως βρίσκω σημεία στο άπειρο?

$\Downarrow$

$xy-1=0$

Ομογενοποιώ:

$XY-Z^2=0$

δηλ. 3άδες

Για να βρω τα σημεία λύνω:

$$\begin{cases} XY-Z^2=0 \\ Z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} XY=0 \\ Z=0 \end{cases} \Rightarrow X=0 \text{ ή } Y=0$$

Άρα σημεία (3άδες) στο άπειρο:

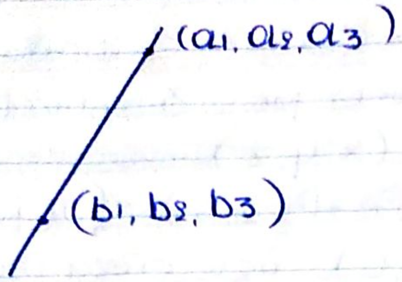
$(0,1,0)$, $(1,0,0)$

$\shortparallel$

$(0,2,0)$ Πάλι οποιοδήποτε $X\neq 0$

$\shortparallel$

Δηλ. οποιοδ. $Y\neq 0$ $(0,\pi,0)$ (Συνήθως επιλέγω 1)



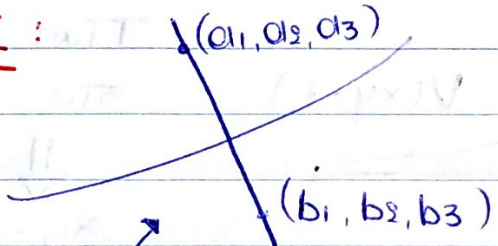
Ψάχνω να βρω την ευθεία, το οποίο είπαμε ότι γίνεται εύκολα με την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = x\cdot(a_2b_3 - a_3b_2) - y(a_1b_3 - a_3b_1) + z\cdot(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

rank = 2

$\Rightarrow$ Αναγκαστικά μία υποορίζουσα $\neq 0$

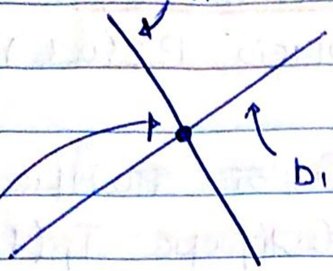
ΣΥΝΕΠΩΣ:



$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

(εξίσωση ευθείας)

$a_1x + a_2y + a_3z = 0$



$b_1x + b_2y + b_3z = 0$

Οποιαδήποτε 3άδα δίνει ευθεία? Ναι, εκτός της 3άδας $(0,0,0)$

Για να είναι οι δύο ευθείες διαφορετικές πρέπει $(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$
(δηλ. όχι πολλαπλάσια)

(Δηλ. αυτό που είπαμε πριν: μία τουλ. υποορ. $\neq 0$, δηλ. rank $= 2$)

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0)$$

λόγω των προηγουμ. που είπαμε

Για να είναι σημείο τομής πρέπει να ανήκει κ. στη μία ευθεία κ. στην άλλη.

Πράγματι:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

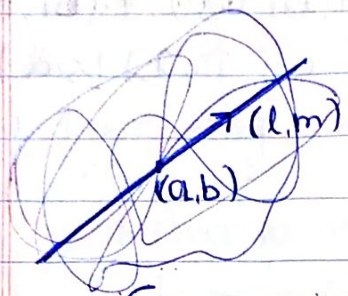
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Αντίστοιχα κ. με την άλλη ευθεία:

$$b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ονομάζουμε πολλαπλότητα τομής της ευθείας $L\begin{pmatrix} x=a+lt \\ y=b+mt \end{pmatrix}$ στο σημείο $P=(a,b)$ την πολλαπλότητα της ρίζας $t=0$ στο πολ/μο $P(a+lt, b+mt)$ κ' τη συμβολίζουμε $I_p(f,L)$



$$\boxed{\begin{matrix} x=a+lt \\ y=b+mt \end{matrix}}$$

Εστω τώρα ότι έχω μια καμπύλη $V(f)$
$f(x,y)=0$
Θέλω να βρω το σημείο τομής με x,y
δηλ. θέλω να λύσω
$f(a+lt, b+mt)=0$

Αλλά γνωρίζ. από Taylor ότι:

$$f(a+lt, b+mt) = f(a,b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot l + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot m\right)t$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)l^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)lm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)m^2\right)\frac{t^2}{2} + \dots$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ:

i) $f(a,b) \neq 0$: t δεν είναι ρίζα του πολ/μου
Το (a,b) δεν είναι σημείο της καμπύλης
$I_p(f,L)=0$

ii) $f(a,b)=0$: $t=0$ σίγουρα μία ρίζα του πολ/μου
άρα σίγουρα $I_p(f,L)\geq 1$
Το (a,b) είναι σημείο της καμπύλης

Άρα είμαστε στην περίπτωση ii). $f(a,b)=0$.
Έχουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

• $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$ ή $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)l + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)m = 0$
$I_p(f,L)\geq 1$ ← εφαπτόμενη

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-a) = 0}$$ Εξίσωση εφαπτομένης

Στην περίπτωση αυτή το σημείο λέγεται **απλό**.

- Ένα σημείο (a,b) ονομάζεται σημείο καμπής αν είναι απλό σημείο (δηλ. μηδενίζει την καμπύλη μου, $f(a,b)=0$) κ' η $I_p(f,L) > 2$ (L εφαπτόμενη)

- $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$: (ιδιόμορφο σημείο)

$$\left.\begin{aligned} f(a,b) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$ Λύνοντας το βρίσκω το ιδιόμορφο σημείο

$I_p(f,L) \geq 2$

Έχουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

(α) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq 0$ ή $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \neq 0$

Το σημείο αυτό ονομάζεται **διπλό**, $I_p(f,L) \geq 2$

Εδώ έχω δύο εφαπτόμενες:

Θέλω $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot l^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\, lm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) m^2 = 0$

Ποια τα l, m?

$\Downarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 = 0$$

2βάθμια ως προς $x-a$ κ' $y-b$

Αντίστοιχα λέγεται τριπλό σημείο αν 1η κ' 2η παράγωγος $=0$ κ' μία από την 3η $\neq 0$

ΠΑΡΑΔ: $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + y + 3$
Δ.ο. το $(1,2)$ είναι σημείο της καμπύλης $V(f)$ κ: αν το σημείο είναι απλό βρείτε την εφαπτομένη στο $(1,2)$.

ΛΥΣΗ:

Παρατ. ότι $f(1,2)=0$, άρα είναι σημείο καμπ.

Για το απλό χρησιμοποιώ τον τύπο που δείξαμε πριν

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy \rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1\cdot 2 = -9 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 1 \rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2)} = -2$$

απλό

άρα: $-9(x-1) + (-2)(y-2) = 0$ ∎

ΠΑΡΑΔ: Δ.ο. το $(0,0)$ είναι σημείο καμπύλης της καμπύλης $V(y-x^5)$

ΛΥΣΗ:

Θ.ν.δ.ο.: i) $(0,0)$ σημείο της $V(f)$
ii) απλό σημείο
iii) $I_p(f,L) > 2$

i) $f(x,y) = y - x^5 \rightarrow f(0,0) = 0$

ii) Πρέπει μία απ' τις μερικές παραγώγους $\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -5x^4 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

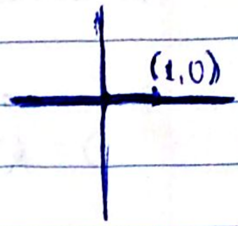
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$$

άρα απλό

iii) Πρέπει να βρω την εξίσ. εφαπτομ. στο (0,0):

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)=0$$

$\Rightarrow y=0$ (άξονας των x)

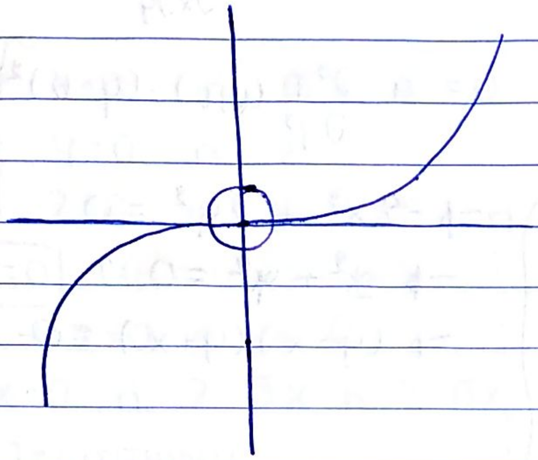


~~$I_p(f,L)\geq 2$~~

$f(0+t,\ 0+0\cdot t)=-t^5$

$I_p(f,L)=5>2$ (5 σημεία καμπής)

Πώς μοιάζει η καμπύλη?



ΠΑΡΑΔ: Βρείτε όλα τα ιδιόμορφα σημεία της καμπ.

$$V(x^3-x^2+y^2)$$

$\boxed{\mathbb{C}^2}$ ή $\boxed{\mathbb{R}^2}$

(δεν έχει διαφορά)

ΛΥΣΗ:

$$\begin{cases} x^3-x^2+y^2=0 \Rightarrow x^3-x^2=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}=0 \Rightarrow 3x^2-2x=0 \Rightarrow x\cdot(3x-2)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow 2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2\cdot(x-1)=0 \\ x\cdot(3x-2)=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ : κοινή ρίζα} \\ y=0 \end{cases}$$

Άρα το μόνο ιδιόμορφο σημείο είναι το (0,0)

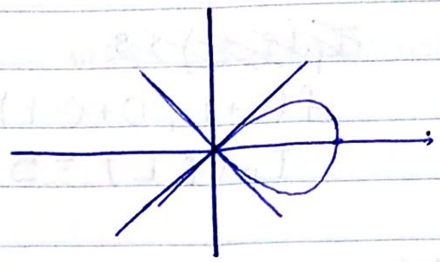
Ψάχνω τώρα εφαπτόμενες στο $(0,0)$:

$\boxed{\text{α' τρόπος}}$: $E(f) = -x^2 + y^2 = (y-x)(y+x)$

άρα έχω δύο εφαπτόμενες:

$$y - x = 0 \quad , \quad y + x = 0$$

$$x^3 - x^2 + y^2 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 = x^2(1-x)$$
$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$$



Έτσι μοιάζει η καμπ.

$\boxed{\text{β' τρόπος}}$: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\cdot(x-0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\cdot(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\cdot(y-0)^2 = 0$$

$$f = x^3 - x^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 2y^2 = 0$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (y-x)(y+x) = 0$$

Τι αλλάζει στον προβολικό χώρο ?

$f(x,y) = 0$ | $F(x,y,z) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ | $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ | $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$

ΠΑΡΑΔ: Βρείτε τα ιδιόμορφα σημεία της καμπύλης

$$V(y^2z^2 - x^2z^2 + x^4)$$

ΛΥΣΗ:

$F = y^2z^2 - x^2z^2 + x^4 = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -2xz^2 + 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - z^2) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2yz^2 = 0 \Rightarrow yz^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ή } z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2y^2z - 2x^2z = 0 \Rightarrow z(y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } \sqrt{2}x - z = 0 \text{ ή } \sqrt{2}x + z = 0 \quad (1) \\ y = 0 \text{ ή } z = 0 \\ z = 0 \text{ ή } y - x = 0 \text{ ή } y + x = 0 \quad (3) \end{cases}$$

• $\boxed{y = 0}$ (1η περίπτωση)

$(3) \rightarrow z = 0$ ή $x = 0$

$x = 0$ ή $z = \sqrt{2}x$ ή $z = -\sqrt{2}x$

Περιπτώσεις:

a) $y = 0$, $z = 0$:

$x = 0$ ή $x = 0$ ή $x = 0$

άρα μοναδικό σημείο $(0,0,0)$, το οποίο όμως $\notin$ στον προβολικό χώρο.

Άρα δεν έχω κανένα ιδιόμορφο

β) $y = 0$, $x = 0$:

Τότε έχω το σημείο $(0,0,1)$ ή $(0,\cancel{0,0})$ ή $(0,\cancel{0},0)$

Συνεπώς $\boxed{(0,0,1)}$ μοναδικό ιδιόμορφο σημείο

• $\boxed{z = 0}$ (2η περίπτωση)

$(1) \rightarrow x = 0$ ή $\sqrt{2}x = z = 0$

ή $\sqrt{2}x = 0$

άρα $x = 0$

$(3) \rightarrow \boxed{(0,1,0)}$

$\cancel{(0,0,0)}$

$\cancel{(0,0,0)}$

Δες ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΡΑ: 2 ιδιόμορφα σημεία, το $(0,0,1)$ κ' $(0,1,0)$